OTTO-VON-GUERICKE-UNIVERSITÄT MAGDEBURG

Mini-Kurs zur linearen Optimierung

Horst Hollatz

Versionsdatum: 20. Januar 2006

horst.hollatz.de — horst@hollatz.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Das allgemeine lineare Optimierungsproblem

Um möglichst einfach in die Problemstellung einzuführen, sollen zwei Beispiele vorangestellt sein.

Beispiel 1 (Ernährungsproblem): Zum Leben braucht der Mensch neben emotionaler Zuwendung verschiedene Stoffe $1, 2, \ldots, m$, die er über Nahrungsmittel in Mindestmengen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ zu sich nehmen muss; dazu gehören z. B. Eiweiß, Kohlenhydrate, Vitamine, Mineralsalze usw., die sich in unterschiedlichen Mengen in Nahrungsmitteln $1, 2, \ldots, n$ befinden. Es sei a_{ij} der Anteil des Stoffes i im Nahrungsmittel j; ferner seien x_j die (unbekannte) Mengeneinheit, die vom Nahrungsmittel j aufgenommen wird und c_j der entsprechende Preis pro Mengeneinheit für das Nahrungsmittel j. Dann ist

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

die Gesamtmenge, die vom Stoff i aufgenommen wird. Natürlich muss diese Menge den Mindestbedarf decken; wir haben daher zu fordern, dass die Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqq b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x_j \geqq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

einzuhalten sind. Die entstehenden Kosten ergeben sich zu

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

welche zu minimieren sind unter Einhaltung der Beschränkungen an die Werte der Variablen $x_1, \ldots, x_n$.

Diese Aufgabe enthält viele vereinfachende Annahmen: So gibt es Schwankungen in der Zusammensetzung der Nahrungsmittel; die Futterverwertung ist bei verschiedenen Menschen oft unterschiedlich und variiert selbst beim gleichen Menschen; der Preis ist nicht direkt proportional zur gekauften Menge; die Qualität des Speiseplanes ist nicht berücksichtigt; möglicherweise sind die benötigten Nahrungsmittel nicht in den geforderten Mengen verfügbar oder nur zu gewissen Zeiten usw. Man darf Verbesserungen am Modell vornehmen, um es realistischer zu machen. Ein realistischeres Modell wird aber zu wesentlich höheren Kosten führen.

Beispiel 2 (Transportproblem): In den Betrieben $1, 2, \ldots, m$ wird eine Ware in den Mengeneinheiten $b_1, \ldots, b_m$ hergestellt; von den Geschäften $1, \ldots, n$ wird die Ware in den Mengeneinheiten $a_1, \ldots, a_n$ angefordert. Wenn vom Betrieb i zum Geschäft j genau x_{ij} Mengeneinheiten der Ware transportiert werden, mögen Kosten von c_{ij} pro Mengeneinheit anfallen. Man möchte natürlich die Gesamtkosten minimieren. Für die Modellierung dieser Aufgabe nehmen wir an, dass ein ökonomisches Gleichgewicht besteht, also Angebot und Nachfrage übereinstimmen:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i.$$

Diese Annahme lässt sich leicht erfüllen. Sollte nämlich das Angebot die Nachfrage übersteigen, wird ein fiktiver Abnehmer eingeführt, der das Überangebot zu Nullkosten abnimmt. Sollte die Nachfrage das Angebot übersteigen, wird ein fiktiver Produzent hinzugenommen, der die Differenz liefert und dafür alles übersteigende Transportkosten verlangt, so dass sein Angebot erst dann in Anspruch genommen wird, wenn alle anderen Angebote verteilt sind. Unter der Voraussetzung des ökonomischen Gleichgewichtes müssen offenbar die folgenden Bedingungen an die Transportmengen x_{ij} erfüllt sein:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j,\; j = 1, \ldots, n, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i,\; i = 1, \ldots, m,\; x_{ij} \geqq 0,\; \forall\, i, j$$

und es sind die Gesamtkosten

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

unter Einhaltung der genannten Bedingungen zu minimieren. Auch hier bemerkt man, dass erhebliche Vereinfachungen am Modell vorgenommen wurden.

Das allgemeine lineare Optimierungsproblem wird wie folgt gefaßt. Es ist eine lineare Funktion, die man **Zielfunktion** nennt,

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

zu maximieren, wobei die Werte der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ gewissen Bedingungen zu genügen haben:

- Einige oder auch alle Variable dürfen nur nichtnegative Werte annehmen:

$$x_j \geqq 0,\ j \in J_+ \subseteqq \{1, \ldots, n\}.$$

- Es sind nur Lösungen eines linearen Gleichungssystems zugelassen:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i \in I_0 \subseteqq \{1, \ldots, m\}.$$

- Die Werte der Variablen müssen ein lineares Ungleichungssystem der Form „ $\geqq$ “ erfüllen:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqq b_i,\ i \in I_+ \subseteqq \{1, \ldots, m\}.$$

- Die Werte der Variablen müssen ein lineares Ungleichungssystem der Form „ $\leqq$ “ erfüllen:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i,\ i \in I_- \subseteqq \{1, \ldots, m\}.$$

Natürlich bilden die Indexmengen I_0, I_+, I_- eine Zerlegung der Menge $\{1, \ldots, m\}$. Jedes n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$, das diese Forderungen erfüllt, nennt man **zulässige Lösung** der Aufgabe. Eine zulässige Lösung der Aufgabe, die bezüglich aller zulässigen Lösungen der Zielfunktion einen maximalen Wert erteilt, nennt man **optimale Lösung**. Die Menge aller zulässigen Lösungen heißt **zulässiger Bereich** oder auch **Restriktionsbereich**.

Jedes allgemeine lineare Optimierungsproblem lässt sich auf eine sog. **Normalform** bringen. Eine lineare Optimierungsaufgabe befindet sich in Normalform, wenn alle Variablen nur nichtnegative Werte annehmen dürfen, nur Ungleichungsbeschränkungen der Form „ $\leqq$ “ vorhanden sind und die Zielfunktion zu maximieren ist, d. h. falls $J_+ = \{1, \ldots, n\}, I_- = \{1, \ldots, m\}$ und $I_0 = I_+ = \emptyset$ gilt. Durch die folgenden einfachen Operationen ist ein allgemeines lineares Optimierungsproblem in Normalform überführbar.

- Falls das Minimum der Zielfunktion gesucht ist, multipliziere man die Koeffizienten der Zielfunktion mit -1, denn es gilt für eine Funktion f:

$$\min f(x) = -\max -f(x).$$

- Falls die Werte der Variablen x_j keine Vorzeichenbeschränkung haben, ersetze man x_j durch $x_j^+ - x_j^-$ und füge die Forderungen $x_j^+ \geqq 0$, $x_j^- \geqq 0$ zur Aufgabe hinzu. Diese Operation benutzt, dass sich jede reelle Zahl als Differenz zweier nichtnegativer Zahlen darstellen lässt. Bei dieser Operation wird sich die Variablen-Anzahl der Aufgabe entsprechend erhöhen.

- Eine Ungleichung der Form „ $\geqq$ “ wird mit -1 multipliziert.

- Eine Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

ersetze man durch zwei Ungleichungen;

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqq b_i, \; \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leqq -b_i.$$

Es dürfte klar sein, wie man aus den zulässigen Lösungen der Aufgabe in Normalform die zulässigen Lösungen der ursprünglichen Aufgabe erhält. Als **Standardform** einer linearen Optimierungsaufgabe bezeichnet man eine solche, bei der alle Variablen nur nichtnegative Werte annehmen dürfen und nur Gleichungsforderungen bestehen: Man maximiere eine Funktion

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

unter den Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \; i = 1, \ldots, m; \; x_j \geqq 0, \; j = 1, \ldots, n.$$

Man sieht sofort, dass jede Aufgabe in Normalform in eine Aufgabe in Standardform überführbar ist und umgekehrt.
Unter Nutzung der Matrizenschreibweise lässt sich das lineare Optimierungsproblem in Normalform auch als

$$\max \left\{ \boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}, \; \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{o} \right\}$$

schreiben; entsprechend lautet die Standardform

$$\max \left\{ \boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \; \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{o} \right\}.$$

Die „ $\leqq$ “-Relation zwischen Vektoren ist komponentenweise zu verstehen:

$$\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow x_j \leqq y_j,\ \forall\, j.$$

Im folgenden verwenden wir die Normalform einer linearen Optimierungsaufgabe:

$$\max\left\{\, \boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{o} \,\right\},\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m,n}$$

mit dem zulässigen Bereich

$$M = \left\{\, \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{o} \,\right\}.$$

Kapitel 2

Dualität

Um einige wichtige Sätze über lineare Optimierungsaufgaben zu beweisen, benötigen wir etwas Wissen über lineare Ungleichungssysteme.

2.1. Satz von G. Farkas (1903): *Das System $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{o}$ ist genau dann lösbar, wenn für alle Lösungen des Systems $\boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{o}$ die Ungleichung $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \leqq 0$ erfüllt ist.*

Beweis: Es sei $\boldsymbol{u}$ eine Lösung des obigen Systems und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor mit $\boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{o}$. Wegen $\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{o}$ gilt natürlich $\boldsymbol{u}^\mathsf{T}\boldsymbol{Ax} \leqq 0$, was aber $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \leqq 0$ bedeutet. Damit haben wir die Notwendigkeit der Bedingung bereits bewiesen.
Setzen wir nun andererseits voraus, dass $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \leqq 0$ für alle Vektoren $\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{o}$ gilt; außerdem sei angenommen, dass das System $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{o}$ unlösbar ist, also der Vektor $\boldsymbol{c}$ nicht in der Menge

$$K = \left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{o} \right\}$$

liegt. Die Menge K ist abgeschlossen; sie enthält den Nullvektor und alle Linearkombinationen mit nichtnegativen Koeffizienten, die man aus den Zeilenvektoren $\boldsymbol{A}_1^\mathsf{T}, \boldsymbol{A}_2^\mathsf{T}, \ldots, \boldsymbol{A}_m^\mathsf{T}$ der Matrix $\boldsymbol{A}$ bilden kann; mit $\boldsymbol{x} \in K$ gilt auch $\lambda\boldsymbol{x} \in K$ für alle $\lambda \geqq 0$. Da der Vektor $\boldsymbol{c}$ nicht in der Menge K liegt, hat er einen positven Abstand von K: Es gibt einen Vektor $\boldsymbol{x}^* \in K$ mit $\|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}^*\| \leqq \|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}\|$ für alle $\boldsymbol{x} \in K$. Es sei $\boldsymbol{y}^* \in K$ ein weiterer Vektor mit dieser Eigenschaft. Dann liegt der Vektor $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{y}^*)$ auch in K, hat aber von $\boldsymbol{c}$ einen kleineren Abstand als $\boldsymbol{x}^*$, was nicht sein kann, da $\boldsymbol{x}^*$ bereits den kleinsten Abstand haben sollte. Damit sind die Vektoren $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}^*$ und $\boldsymbol{x}^*$ orthogonal zueinander: $(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}^*)^\mathsf{T}\boldsymbol{x}^* = 0$ und kein weiterer Vektor aus K liegt in der Kugel

$$Q = \left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}\| \leqq \|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}^*\| \right\}.$$

Nehmen wir nun an, dass es einen Vektor $\boldsymbol{y} \in K$ mit $(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}^*)^\mathsf{T}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*) > 0$, also $(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}^*)^\mathsf{T}\boldsymbol{y} > 0$ gibt. Alle Vektoren aus der Verbindungsstrecke zwischen $\boldsymbol{x}^*$ und $\boldsymbol{y}$

liegen in der Menge K:

$$\left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}^* + (1-\alpha)\boldsymbol{y},\ 0 \leqq \alpha \leqq 1 \right\} \subseteqq K.$$

Wegen der Annahme gibt es auf der Verbindungsstrecke einen Punkt, der in der Kugel Q liegt, was nach der obigen Überlegung unmöglich ist. Also gilt

$$(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}^*)^\mathsf{T}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \leqq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in K,$$

und wegen $(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}^*)^\mathsf{T}\boldsymbol{x}^* = 0$:

$$(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}^*)^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \leqq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in K,$$

insbesondere

$$(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}^*)^\mathsf{T}\boldsymbol{A}_i \leqq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Damit haben wir gezeigt, dass der Vektor $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}^*$ eine Lösung des Systems $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{o}$ ist, also nach Voraussetzung $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}^*) \leqq 0$ gelten muss. Andererseits ist aber

$$0 < (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}^*)^\mathsf{T}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{c}^\mathsf{T}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}^*).$$

Dieser Widerspruch beweist, dass das System $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{o}$ lösbar sein muss. ✤

Der Satz von Farkas ist nun Grundlage für Lösungsaussagen bei linearen Optimierungsaufgaben. Wir nennen die Aufgabe

$$\text{P:} \qquad \max\left\{ \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{o} \right\}$$

Primalaufgabe und ordnen ihr die sog. **Dualaufgabe**

$$\text{D:} \qquad \min\left\{ \boldsymbol{b}^\mathsf{T}\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{o} \right\}$$

zu. Ausführlich geschrieben lauten die beiden Aufgaben

$$\text{P:} \qquad \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i,\ i = 1, \ldots, m,\ x_j \geqq 0,\ j = 1, \ldots, n \right\},$$

$$\text{D:} \qquad \min\left\{ \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geqq c_j,\ j = 1, \ldots, n,\ u_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, m \right\}.$$

Man sieht, dass der Variablen x_j aus der Primalaufgabe die j-te Restriktion in der Dualaufgabe entspricht; ebenso entspricht der i-ten Variablen u_i aus der Dualaufgabe die i-te Restriktion in der Primalaufgabe. Man überlegt sich leicht, dass die Dualaufgabe der Dualaufgabe wieder die Primalaufgabe ist.
Zur Vorbereitung der Hauptsätze in der linearen Optimierung sollen zwei Hilfsaussagen bewiesen werden, die Zusammenhänge zwischen der Primal- und der Dualaufgabe beleuchten.

2.2. Schrankensatz: *Ist der Vektor $\boldsymbol{x}$ eine zulässige Lösung der Primalaufgabe und der Vektor $\boldsymbol{u}$ eine zulässige Lösung der Dualaufgabe, so gilt $\boldsymbol{b}^\mathsf{T}\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}$; die Gleichheit ist genau dann gegeben, wenn $\boldsymbol{x}^\mathsf{T}(\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{u}^\mathsf{T}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = 0$ ausfällt.*

Beweis: Es sei der Vektor $\boldsymbol{x}$ zulässig für die Aufgabe P und der Vektor $\boldsymbol{u}$ zulässig für die Aufgabe D. Wegen $\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{o}$ dürfen wir die rechte und die linke Seite der Ungleichung $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}$ skalar mit dem Vektor $\boldsymbol{u}$ multiplizieren: Es ist also

$$\boldsymbol{u}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}^\mathsf{T}\boldsymbol{u};$$

analog multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{c}$ skalar mit dem Vektor $\boldsymbol{x}$ und erhalten:

$$\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x};$$

beides zusammen liefert:

$$\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{u}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}.$$

Diese Ungleichungen gelten für alle zulässigen Lösungen $\boldsymbol{x}$ der Primalaufgabe und alle zulässigen Lösungen $\boldsymbol{u}$ der Dualaufgabe. Für die Gleichheit ist offenbar notwendig und hinreichend, dass

$$\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}$$

gilt, woraus der zweite Teil der Behauptung folgt. ♣

Nach dieser Hilfsaussage ist der Zielfunktionswert der Minimum-Aufgabe für jede zulässige Lösung eine obere Schranke für den Zielfunktionswert der Maximum-Aufgabe.

2.3. Satz: *Wenn die primale Maximum-Aufgabe eine zulässige Lösung und eine obere Schranke für den Zielfunktionswert hat, so besitzt die Dualaufgabe eine optimale Lösung. Die obere Grenze des Zielfunktionswertes der primalen Maximum-Aufgabe ist der optimale Zielfunktionswert der Dualaufgabe.*

Beweis: Nach Voraussetzung hat die Primalaufgabe eine obere Grenze M. Es gilt somit $\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} \leqq M$ für alle Lösungen von $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{o}$. Wir ersetzen den Vektor $\boldsymbol{x}$ durch den Vektor $\frac{1}{t}\boldsymbol{x}$ mit $t > 0$; dann gilt offenbar

$$\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} - Mt \leqq 0 \quad \forall(\boldsymbol{x}, t) : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}t \leqq 0,\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{o},\ t > 0.$$

Wir zeigen, dass die Bedingung $t > 0$ durch $t \geqq 0$ ersetzt werden darf. Angenommen, das System

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}t \leqq 0,\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{o},\ t \geqq 0$$

hat eine Lösung $(\boldsymbol{x}, 0)$ und es gilt $\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} > 0$; es sei $\boldsymbol{x}^*$ eine zulässige Lösung der Aufgabe P und $\boldsymbol{x}_\alpha = \boldsymbol{x}^* + \alpha\boldsymbol{x}$ mit $\alpha \geqq 0$. Dann gilt

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\alpha = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{o} \quad \forall\alpha \geqq 0$$

und außerdem $\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}_\alpha = \boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}^* + \alpha\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} \Longrightarrow \infty$ für $\alpha \Longrightarrow \infty$; also ist die Zielfunktion der Primalaufgabe nach oben unbeschränkt, was der Voraussetzung widerspricht. Damit ist gezeigt, dass

$$\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} - Mt \leqq 0 \quad \forall(\boldsymbol{x}, t) : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}t \leqq 0,\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{o},\ t \geqq 0$$

gilt. Für das Anwenden des Satzes von Farkas schreiben wir die Aussage in einer etwas anderen, aber äquivalenten Form. Es gilt

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ -M \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ t \end{pmatrix} \leqq 0 \quad \forall(\boldsymbol{x}, t) : \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ t \end{pmatrix} \leqq \boldsymbol{o}.$$

Nach dem Satz von Farkas gibt es einen Vektor $(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*, s^*)$ mit

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ -M \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & -1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^* \\ \boldsymbol{v}^* \\ s^* \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}^* \geqq \boldsymbol{o},\ \boldsymbol{v}^* \geqq \boldsymbol{o},\ s^* \geqq 0,$$

d. h.

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{v}^*, \quad \boldsymbol{u}^* \geqq \boldsymbol{o},\ \boldsymbol{v}^* \geqq \boldsymbol{o},$$

$$M = \boldsymbol{b}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}^* + s^*, \quad s^* \geqq 0.$$

Wegen $\boldsymbol{v}^* \geqq \boldsymbol{o}$ folgt daraus $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}^* \geqq \boldsymbol{c}$; also ist der Vektor $\boldsymbol{u}^*$ eine zulässige Lösung der Dualaufgabe und wegen $s^* \geqq 0$ gilt $\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}^* \leqq M$. Aus dem vorangegangenen Satz folgt aber, dass die Zahl M untere Schranke der Dualaufgabe ist; zusammen muss also $s^* = 0$ sein; damit wird die untere Grenze in $\boldsymbol{u}^*$ angenommen, also ist $\boldsymbol{u}^*$ eine optimale Lösung der Dualaufgabe. ✾

Der folgende Satz ist eine zentrale Aussage in der linearen Optimierung.

2.4. Dualitätssatz: *Ein lineares Optimierungsproblem ist genau dann lösbar, wenn seine Dualaufgabe eine optimale Lösung besitzt. Haben sowohl Primal- als auch Dualaufgabe zulässige Lösungen, so haben sie auch optimale Lösungen und die Zielfunktionswerte stimmen in den optimalen Lösungen überein.*

Beweis: Es habe die Aufgabe P eine optimale Lösung; insbesondere hat sie dann eine zulässige Lösung und eine endliche obere Schranke. Nach dem vorangegangenen Satz hat dann die Dualaufgabe eine optimale Lösung. Wegen der Symmetrie der beiden Aufgaben ist damit der erste Teil des Satzes bewiesen. Nehmen wir nun an, dass beide Aufgaben zulässige Lösungen haben. Da jeder Zielfunktionswert der Minimum-Aufgabe eine obere Schranke für alle Zielfunktionswerte der Maximum-Aufgabe ist, hat die Primalaufgabe somit eine endliche obere Schranke; nach dem letzten Satz hat die Dualaufgabe eine optimale Lösung und die obere Grenze der primalen Maximum-Aufgabe ist der optimale Zielfunktionswert der Dualaufgabe. Indem wir Primal- und Dualaufgabe vertauschen, erhalten wir die Behauptung vollständig. ♣

Abschließend wird eine Aussage über den komplementären Schlupf bewiesen. Wir sagen, dass sich zwei Ungleichungen im **komplementären Schlupf** befinden, falls mindestens eine von ihnen als Gleichung erfüllt ist.

2.5. Satz vom komplementären Schlupf, Optimalitätsbedingungen: *Ein zulässiger Vektor $\boldsymbol{x}^*$ der Primalaufgabe P und ein zulässiger Vektor $\boldsymbol{u}^*$ der Dualaufgabe D sind genau dann optimal für die jeweilige Aufgabe, wenn sich die korrespondierenden Ungleichungen für diese Vektoren im komplementären Schlupf befinden; d. h.*

$$\boldsymbol{u}^{*T}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*)=0, \quad \boldsymbol{x}^{*T}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{c})=0.$$

Diese Aussage folgt direkt aus dem Schrankensatz und dem Dualitätssatz. In ausgeschriebener Form lauten die Optimalitätsbedingungen wie folgt. Eine zulässige Lösung $\boldsymbol{x}$ von P und eine zulässige Lösung $\boldsymbol{u}$ von D sind genau dann optimal, wenn

$$x_j\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}u_i-c_j\right)=0, \quad j=1,\dots,n,$$

$$u_i\left(b_i-\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)=0, \quad i=1,\dots,m$$

gilt. Wenn also in einer optimalen Lösung der Dualaufgabe die i-te Variable einen positiven Wert hat, so ist die i-te Ungleichung in der Primalaufgabe für alle optimalen Lösungen der Primalaufgabe als Gleichung erfüllt. Wenn die i-te Ungleichung der Primalaufgabe für eine optimale Lösung als strenge Ungleichung erfüllt ist, muss die korrespondierende duale Variable in jeder optimalen Lösung der Dualaufgabe den Wert 0 annehmen.

Kapitel 3

Simplexmethode

Die Simplexmethode ist die grundlegende Methode zum Lösen linearer Optimierungsaufgaben und wurde im Jahre 1947 vom amerikanischen Mathematiker G. B. DANTZIG gefunden, obwohl bereits GAUSS diese Methode kannte (wie sich später herausstellte), aber wegen fehlender Anwendungen nicht weiter verfolgte. Eine wirklich neue Methode publizierte L. V. KANTOROVICH im Jahre 1939. Wegen seiner Bemühungen, seine Resultate auf ökonomische Probleme anzuwenden, wurde er in der damaligen Sowjetunion mit Berufsverbot belegt, so dass seine Ergebnisse erst viele Jahre später einer breiteren Öffentlichkeit bekannt wurden. In Würdigung seiner Verdienste um die Anwendung mathematischer Methoden in der Ökonomie erhielt er im Jahre 1975 gemeinsam mit dem amerikanischen Ökonomen T. C. KOOPMANS den Nobelpreis für Ökonomie. In den letzten Jahren sind mehrere neue, theoretisch effizientere Methoden ausgearbeitet worden, die aber die Simplexmethode in den Anwendungen nicht ersetzen konnten.

Wir gehen von einer Optimierungsaufgabe in Normalform aus:

$$\mathsf{P}: \qquad \max \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i,\ i = 1, \ldots, m;\ x_j \geqq 0,\ j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Für einen gegebenen Vektor $\boldsymbol{x}$ sei

$$u_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ i = 1, \ldots, m,$$

$$x_0 = 0 - \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j.$$

Für die Dualaufgabe

$$\mathsf{D}: \qquad \min \left\{ \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geqq c_j,\ j = 1, \ldots, n,\ u_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, m \right\}$$

setzen wir entsprechend

$$x_j = -c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i,\ j = 1, \dots, n,$$

$$u_0 = 0 + \sum_{i=1}^{m} b_i u_i.$$

Für einen gegebenen Vektor $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{o}$ geben die Werte der Variablen u_i in der Aufgabe P an, wie die i-te Ungleichung erfüllt ist. Im Falle $u_i = 0$ ist die $i-te$ Ungleichung als Gleichung erfüllt (man spricht dann von einer aktiven Ungleichung); im Falle $u_i < 0$ ist der gegebene Vektor $\boldsymbol{x}$ nicht zulässig und im Falle $u_i \geqq 0,\ i = 1, \dots, m$ ist angezeigt, dass eine zulässige Lösung vorliegt. Man nennt daher die Variable u_i in der Aufgabe P **Schlupfvariable**. Ganz analog liegen die Verhältnisse bei der Dualaufgabe. Entsprechend nennt man dort die Variablen x_j Schlupfvariable. Es sei erwähnt, dass durch die gewählten Darstellungen beide Aufgaben vollständig beschrieben sind. Wir wollen beide Darstellungen in einem Rechenschema zusammenfassen:

	u_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
x_0	0	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$
u_1	b_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
u_2	b_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
u_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

.

Dieses Rechenschema beschreibt beide Aufgaben vollständig: Das Lesen der Spalten von links nach rechts liefert die Beschreibung der Primalaufgabe; das Lesen der Zeilen von oben nach unten liefert die Beschreibung der Dualaufgabe. Wenn man im System zur Primalaufgabe r Gleichungen nach gewissen Variablen $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ suksessive auflöst und die erhaltenen Terme in die übrigen Gleichungen und in die Zielfunktion einsetzt, erhält man ein System, das sich durch ein analoges Rechenschema beschreiben lässt:

	u_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_0	$a_{00}^{(r)}$	$a_{01}^{(r)}$	$a_{02}^{(r)}$	$\cdots$	$a_{0n}^{(r)}$
v_1	$a_{10}^{(r)}$	$a_{11}^{(r)}$	$a_{12}^{(r)}$	$\cdots$	$a_{1n}^{(r)}$
v_2	$a_{20}^{(r)}$	$a_{21}^{(r)}$	$a_{22}^{(r)}$	$\cdots$	$a_{2n}^{(r)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
v_m	$a_{m0}^{(r)}$	$a_{m1}^{(r)}$	$a_{m2}^{(r)}$	$\cdots$	$a_{mn}^{(r)}$

.

Hierin stehen die Variablen

$$y_1,\dots,y_n,v_1,\dots,v_m$$

für eine andere Reihenfolge der Variablen

$$x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m$$

aus dem ersten Rechenschema. Dieses neue Schema ist zum ersten und damit zu den ursrünglichen beiden Aufgaben äquivalent. Wir verifizieren diese Äquivalenz an der Primalaufgabe. Zum Rechenschema gehört die Primalaufgabe

$$\max\left\{ a_{00}^{(r)} - \sum_{j=1}^{n} a_{0j}^{(r)} y_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(r)} y_j \leqq a_{i0}^{(r)},\ i=1,\dots,m,\ y_j \geqq 0,\ j=1,\dots,n \right\},$$

die wir mit $\mathsf{P}^{(r)}$ bezeichnen wollen. Es sei $(y_1^*,\dots,y_n^*)$ eine zulässige Lösung der Aufgabe $\mathsf{P}^{(r)}$; ferner seien $v_1^*,\dots,v_m^*$ die Werte der zur Aufgabe gehörenden Schlupfvariablen $v_1,\dots,v_m$. Wenn wir die Variablen $y_1,\dots,y_n,v_1,\dots,v_m$ in ihre ursprüngliche Reihenfolge $x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m$ zurücksortieren und dabei auch ihre Belegung mit den Werten $y_1^*,\dots,y_n^*,v_1^*,\dots,v_m^*$ entsprechend sortieren, erhalten wir eine zulässige Lösung (nebst den Werten der Schlupfvariablen) der Ausgangsaufgabe P. Diese Vorgehensweise lässt sich auch von P nach $\mathsf{P}^{(r)}$ durchführen, womit die Äquivalenz gezeigt ist.

Das Rechenschema nennt man **primal zulässig**, falls $a_{i0}^{(r)} \geqq 0,\ i=1,\dots,m$ gilt und **dual zulässig**, falls $a_{0j}^{(r)} \geqq 0,\ j=1,\dots,n$. Ein sowohl primal als auch dual zulässiges Rechenschema heißt **optimal**. Die Bedeutung dieser Begriffsbildungen wird klar, falls man berücksichtigt, dass das Rechenschema zweifach interpretierbar ist:

Primale Interpretation. Wir lesen aus dem Rechenschema die Darstellung

$$v_i = a_{i0}^{(r)} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(r)} y_j,\ i=1,\dots,m$$

ab. Hierin nennt man die Variablen $v_1,\dots,v_m$ **Basisvariable**; die restlichen Variablen $y_1,\dots,y_n$ heißen **Nichtbasisvariable**. Die Darstellung einer zulässigen Lösung mittels eines Satzes von Basisvariablen ist nicht eindeutig; sie ist genau dann eindeutig, wenn von den $n+m$ Variablen genau n den Wert 0 haben.

Angenommen, es liegt ein primal zulässiges Rechenschema vor; dann ist mit $y_j^* = 0,\ j=1,\dots,n$ eine zulässige Lösung der Aufgabe $\mathsf{P}^{(r)}$ ablesbar, die sich sofort unter Nutzung von $v_i^* = a_{i0}^{(r)},\ i=1,\dots,m$ in eine zulässige Lösung der Aufgabe P überführen lässt. Eine so aus dem Rechenschema gewonnene zulässige Lösung nennt man **zulässige Basislösung**. Die Nichtbasisvariablen haben in einer zulässigen Basislösung den Wert 0. Die Zahl $a_{00}^{(r)}$ ist dabei der Zielfunktionswert für die abgelesene zulässige Basislösung. Ist das Rechenschema dual zulässig, d. h. gilt $a_{0j}^{(r)} \geqq 0,\ j = 1, \ldots, n$, so folgt aus der Darstellung für die Zielfunktion

$$x_0 = a_{00}^{(r)} - \sum_{j=1}^{n} a_{0j}^{(r)} y_j,$$

dass $a_{00}^{(r)}$ der maximale Zielfunktionswert ist, da die Erhöhung des Wertes einer Nichtbasisvariablen zu keiner Erhöhung des aktuellen Zielfunktionswertes führt; also ist in einem solchen Falle das Rechenschema optimal und die abgelesene zulässige Lösung $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ eine optimale der Aufgabe P.

Duale Interpretation. Wir lesen aus dem Rechenschema nun die Darstellung

$$y_j = a_{0j}^{(r)} + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^{(r)} v_i,\ j = 1, \ldots, n$$

ab. Jetzt heißen die Variablen $y_1, \ldots, y_n$ Basisvariable und die Variablen $v_1, \ldots, v_m$ heißen Nichtbasisvariable. Angenommen, das Rechenschema ist dual zulässig, also $a_{0j}^{(r)} \geqq 0,\ j = 1, \ldots, n$; dann ist der Nullpunkt zulässige Lösung der Dualaufgabe $\mathsf{D}^{(r)}$:

$$\min \left\{ a_{00}^{(r)} + \sum_{i=1}^{m} a_{i0}^{(r)} v_i \;\middle|\; \begin{array}{rcl} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}^{(r)} v_i & \geqq & -a_{0j}^{(r)},\ j = 1, \ldots, n, \\ v_i & \geqq & 0,\ i = 1, \ldots, m \end{array} \right\}.$$

Gemeinsam mit den Werten

$$y_j^* = a_{0j}^{(r)},\ j = 1, \ldots, n$$

erhält man daraus eine zulässige Lösung $(u_1^*, \ldots, u_m^*)$ der Aufgabe D. Sollte das Rechenschema auch primal zulässig sein, d. h.

$$a_{i0}^{(r)} \geqq 0,\ i = 1, \ldots, m,$$

so folgt aus der Darstellung der dualen Zielfunktion

$$u_0 = a_{00}^{(r)} + \sum_{i=1}^{m} a_{i0}^{(r)} v_i,$$

dass eine Erhöhung des Wertes einer Nichtbasisvariablen zu keiner Erniedrigung des aktuellen Zielfunktionswertes führen kann, also mit $a_{00}^{(r)}$ der minimale Zielfunktionswert erreicht ist.

3.1. Beispiel: Gegeben sei die Aufgabe

$$\max\left\{ 2x-3y+z \;\middle|\; \begin{array}{rcrl} 2x+y-z & \leqq & 5, & \\ x-y-z & \leqq & -2, & \\ -x+2y+3z & \leqq & 10, & \\ 2x-2y+3z & \leqq & 8, & x,y,z \geqq 0 \end{array} \right\}$$

mit der Dualaufgabe

$$\min\left\{ 5u-2v+10w+8s \;\middle|\; \begin{array}{rcrl} 2u+v-w+2s & \geqq & 2, & \\ u-v+2w-2s & \geqq & -3, & \\ -u-v+3w+3s & \geqq & 1, & u,v,w,s \geqq 0 \end{array} \right\}.$$

Das Anfangsschema lautet:

	u_0	x	y	z
x_0	0	-2	3	-1
u	5	2	1	-1
v	-2	1	-1	$-\mathbf{1}$
w	10	-1	2	3
s	8	2	-2	3

.

Wir lösen die v-Gleichung nach der Variablen z auf und setzen in die übrigen Gleichungen ein. Als neues Rechenschema folgt:

	u_0	x	y	v
x_0	2	-3	4	-1
u	7	1	2	-1
z	2	-1	1	-1
w	4	2	-1	3
s	2	**5**	-5	3

.

Offenbar ist dieses Schema primal zulässig; wir lesen die zulässige Lösung

$$(x,y,z) = (0,0,2)$$

ab, die gemäß der primalen Interpretation den Schlupfvektor

$$(u,v,w,s) = (7,0,4,2)$$

liefert, d. h. die erste Ungleichung liefert den Überschuss 7, die zweite ist aktiv, die dritte hat den Überschuss 4 und die vierte den Überschuss 2. Nun lösen wir die

s-Gleichung nach der Variablen x auf und erhalten das Rechenschema:

	u_0	s	y	v
x_0	$\frac{16}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{4}{5}$
u	$\frac{33}{5}$	$-\frac{1}{5}$	2	$-\frac{8}{5}$
z	$\frac{12}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$
w	$\frac{16}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{9}{5}$
x	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	-1	$\frac{3}{5}$

.

Dieses Schema ist primal und dual zulässig, also optimal. Nach der primalen Interpretation lesen wir als optimale Lösung $(x^*, y^*, z^*) = (\frac{2}{5}, 0, \frac{12}{5})$, den Schlupfvektor $(u^*, v^*, w^*, s^*) = (\frac{33}{5}, 0, \frac{24}{5}, 0)$ und den optimalen Zielfunktionswert $x_0^* = \frac{16}{5}$ ab. Nach der dualen Interpretation lesen wir die entsprechenden Informationen für die Dualaufgabe ab:

$$(u^*, v^*, w^*, s^*) = (0, \frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}),\ (x^*, y^*, z^*) = (0, 1, 0),\ u_0^* = \frac{16}{5}.$$

♡

Die **primale Simplexmethode** besteht nun darin, ausgehend von einem primal zulässigen Rechenschema eine Folge von Transformationen der obigen Art derart auszuführen, dass nach endlich vielen Schritten ein optimales Rechenschema entsteht, wobei beim Übergang von einem Rechenschema zum nächsten die folgenden beiden Bedingungen einzuhalten sind:

- Der aktuelle Zielfunktionswert darf sich nicht verkleinern (muss möglichst wachsen).
- Das neue Rechenschema muss wieder primal zulässig sein.

Insbesondere wird also durch die primale Simplexmethode eine endliche Folge von primal zulässigen Basislösungen erzeugt, deren letzte optimal ist.
Analog besteht die duale Simplexmethode darin, ausgehend von einem dual zulässigen Rechenschema, eine Folge von Transformationen der obigen Art so auszuführen, dass in jedem Schritt der aktuelle Zielfunktionswert nicht wächst (möglichst fällt), das neue Rechenschema wieder dual zulässig ist und schließlich ein optimales Rechenschema entsteht.

Nach dem Dualitätssatz ist folgendes klar: Wenn Primal- und Dualaufgabe zulässige Lösungen haben, sind sowohl die primale als auch die duale Simplexmethode durchführbar. Wenn sich überdies der Zielfunktionswert in jedem Schritt ändert, liefern beide Methoden nach endlich vielen Schritten eine optimale Lösung der Primalaufgabe und auch der Dualaufgabe.
Für die Darstellung der primalen Simplexmethode verwenden wir die primale Interpretation des Rechenschemas und beschreiben einen Transformationsschritt, wobei wir die oberen Indices weglassen. Es sei also eine Darstellung von Basisvariablen durch Nichtbasisvariable gegeben:

$$v_i = a_{i0} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j,\; i = 1, \ldots, m$$

mit der Zielfunktion

$$x_0 = a_{00} - \sum_{j=1}^{n} a_{0j} y_j$$

und dem Rechenschema

$$\begin{array}{|c||c|cccc|}
\hline
 & u_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\
\hline
x_0 & a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\
\hline
v_1 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
v_2 & a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
v_m & a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\
\hline
\end{array}.$$

Die primale Zulässigkeit bedeutet hier, dass $a_{i0} \geqq 0,\ i = 1, \ldots, m$ gilt. Sämtliche Variable

$$y_1, \ldots, y_n, v_1, \ldots, v_m$$

dürfen nur nichtnegative Werte annehmen. Offenbar lässt sich der Wert der Zielfunktion nur erhöhen, falls mindestens einer der Faktoren $a_{01}, \ldots, a_{0n}$ negativ ist. Es sei etwa $a_{0j_*} < 0$; die ausgewählte Spalte j_* heißt **Pivotspalte**. Wir belassen alle Nichtbasisvariable y_j mit Ausnahme von y_{j_*} auf ihrem aktuellen Wert 0; aus der obigen Darstellung ergibt sich

$$v_i = a_{i0} - a_{ij_*} y_{j_*},\; i = 1, \ldots, m,$$

$$x_0 = a_{00} - a_{0j_*} y_{j_*}.$$

Mit der Forderung $v_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, m$ folgt daraus

$$a_{ij_*} y_{j_*} \leqq a_{i0},\ i = 1, \ldots, m.$$

Diese m Ungleichungen schränken den Maximalwert der Variablen y_{j_*} ein. Wegen $a_{i0} \geqq 0$ für $i = 1, \ldots, m$ sind dabei nur jene Ungleichungen von Bedeutung, in denen der Faktor a_{ij_*} positiv ist. Sollten also alle Zahlen $a_{ij_*},\ i = 1, \ldots, m$ nicht positiv sein, darf die Variable y_{j_*} beliebig große Werte annehmen, ohne dass die primale Zulässigkeit des Rechenschemas verletzt wird. Wegen $a_{0j_*} < 0$ wird aber der Zielfunktionswert in diesem Falle beliebig große Werte annehmen. Damit haben wir ein Kriterium, das uns sagt, wann die Zielfunktion über dem zulässigen Bereich nach oben unbeschränkt ist.

3.2. Unbeschränktheitskriterium: *Wenn für ein j*

$$a_{0j} < 0, \quad a_{ij} \leqq 0,\ i = 1, \ldots, m$$

ausfällt, so ist die Zielfunktion auf dem zulässigen Bereich nach oben unbeschränkt und daher die Aufgabe nicht lösbar.

Es sei nunmehr die Menge

$$I_+ = \{\, i \mid a_{ij_*} > 0 \,\}$$

nicht leer. Dann erhalten wir aus den beschränkenden Ungleichungen für den Wert der Variablen y_{j_*}:

$$y_{j_*} \leqq \frac{a_{i0}}{a_{ij_*}},\ i \in I_+,$$

also

$$y_{j_*} = \min \left\{ \frac{a_{i0}}{a_{ij_*}} \;\middle|\; a_{ij_*} > 0 \right\}.$$

Es sei i_* ein Index, wo das Minimum angenommen wird:

$$y_{j_*} = \frac{a_{i_*0}}{a_{i_*j_*}} = \min \left\{ \frac{a_{i0}}{a_{ij_*}} \;\middle|\; a_{ij_*} > 0 \right\}.$$

Die ausgewählte Zeile i_* heißt **Pivotzeile** und $a_{i_*j_*}$ ist das **Pivotelement**.
Nun wird die i_*-Gleichung nach der Variablen y_{j_*} aufgelöst und in die übrigen Gleichungen eingesetzt. Für den neuen Zielfunktionswert folgt dabei

$$x_0 = a_{00} - \frac{a_{0j_*} a_{i_*0}}{a_{i_*j_*}},$$

also wächst der Zielfunktionswert, falls $a_{i_*0} > 0$ gilt. Im Falle $a_{i_*0} = 0$ spricht man von **Ausartung**, da sich in diesem Falle die zulässige Lösung nicht ändert, wohl aber wird eine Basisvariable gegen eine Nichtbasisvariable ausgetauscht. Etwas formaler besteht ein Schritt der primalen Simplexmethode aus den folgenden Aktionen.

1. Auswahl einer Pivotspalte j_*: Man wähle

   $$a_{0j_*} = \min\left\{ a_{0j} \;\middle|\; j = 1, \ldots, n \right\} < 0.$$

   Wenn ein solcher Index nicht existiert, ist das Rechenschema dual zulässig; damit ist es optimal, man liest eine optimale Lösung ab und die Methode endet.

2. Es ist $a_{0j_*} < 0$; Auswahl einer Pivotzeile i_*: Es sei

   $$\frac{a_{i_*0}}{a_{i_*j_*}} = \min\left\{ \frac{a_{i0}}{a_{ij_*}} \;\middle|\; a_{ij_*} > 0 \right\}.$$

   Wenn ein solcher Index nicht existiert, ist die Zielfunktion nach oben unbeschränkt und die Methode endet.

3. Transformation des Rechenschemas mit dem Pivotelement $a_{i_*j_*}$:

   (a) Transformation des Pivotelementes:

   $$\alpha := \frac{1}{a_{i_*j_*}}.$$

   (b) Transformation der Pivotzeile:

   $$a_{i_*j_*} := 1,\; a_{i_*j} := \alpha a_{i_*j},\; j = 0, \ldots, n.$$

   (c) Transformation der übrigen Elemente: Für $i = 0, \ldots, m,\; i \neq i_*$:

   $$\lambda := -a_{ij_*},\; a_{ij_*} := 0,\; a_{ij} := a_{ij} + \lambda a_{i_*j},\; j = 0, \ldots, n.$$

   (d) Setzen des Pivotelementes:

   $$a_{i_*j_*} := \alpha.$$

Die Methode benötigt ein primal zulässiges, erstes Rechenschema, was im Falle $b_i \geqq 0$ für $i = 1, \ldots, m$ offenbar gegeben ist. Anderenfalls kann man wie folgt vorgehen. Die Restriktionen seien so sortiert, dass genau die ersten r rechten Seiten b_i negativ sind und unter ihnen b_1 die absolut maximale Zahl darstellt:

$$I_- = \{\, i \mid b_i < 0 \,\} = \{\, 1, \ldots, r \,\},\; r > 0,\; b_1 = \min\{\, b_i \mid b_i < 0 \,\}.$$

Wir führen eine Hilfsvariable x_{n+1} ein und lösen die modifizierte Aufgabe

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - N x_{n+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+1} \leqq b_i,\ i=1,\dots,r, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqq b_i,\ i=r+1,\dots,m, \\ \qquad\qquad x_j \geqq 0,\ j=1,\dots,n+1 \end{array}\right\}$$

mit einer hinreichend großen Zahl $N > 0$. Diese Aufgabe hat stets eine zulässige Lösung $(\boldsymbol{x}, x_{n+1})$, z. B.

$$(\boldsymbol{x}, x_{n+1}) = (\boldsymbol{o}, -b_1).$$

Die Zahl N wird jedoch nicht explizit benötigt. Als erstes Rechenschema wählen wir das folgende:

	u_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}
x_0	0	0	0	$\cdots$	0	1
	0	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0
u_1	b_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$-\mathbf{1}$
u_2	b_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
u_r	b_r	a_{r1}	a_{r2}	$\cdots$	a_{rn}	-1
u_{r+1}	b_{r+1}	$a_{r+1,1}$	$a_{r+1,2}$	$\cdots$	$a_{r+1,n}$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
u_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0

.

Wichtig ist hier zu bemerken, dass in der obersten Zeile anstelle der Zahl 1 eigentlich die hinreichend große Zahl N stehen müsste. Nach dem ersten Transformationsschritt mit der Pivotzeile $i_* = 1$ und der Pivotspalte $j_* = n+1$ erhalten wir ein Rechenschema der Form

	u_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	u_1
x_0	$a'_{-1,0}$	$a'_{-1,1}$	$a'_{-1,2}$	$\cdots$	$a'_{-1,n}$	$a'_{-1,n+1}$
	a'_{00}	a'_{01}	a'_{02}	$\cdots$	a'_{0n}	$a'_{0,n+1}$
x_{n+1}	a'_{10}	a'_{11}	a'_{12}	$\cdots$	a'_{1n}	-1
u_2	a'_{20}	a'_{21}	a'_{22}	$\cdots$	a'_{2n}	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
u_r	a'_{r0}	a'_{r1}	a'_{r2}	$\cdots$	a'_{rn}	1
u_{r+1}	b_{r+1}	$a_{r+1,1}$	$a_{r+1,2}$	$\cdots$	$a_{r+1,n}$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
u_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0

.

Dieses Schema ist primal zulässig; aus ihm lesen wir die oben genannte zulässige Lösung ab. Wegen der Transformationsformeln müssen die Koeffizienten in der Zeile -1 noch mit der unbekannten Zahl N multipliziert werden. Die Darstellung der Zielfunktion ist daher wie folgt zu lesen:

$$\begin{aligned} x_0 = {} & a'_{-1,0}N + a'_{00} + (a'_{-1,1}N + a'_{01})x_1 + \cdots \\ & + (a'_{-1,n}N + a'_{0n})x_n + (a'_{-1,n+1}N + a'_{0,n+1})u_1 \end{aligned}$$

mit

$$a'_{-1,0} = b_1,\ a'_{-1,j} = a_{1,j}, j = 1, \ldots, n,\ a'_{-1,n+1} = 1.$$

Hier lautet folglich der Test auf duale Zulässigkeit:

$$a'_{-1,j}N + a'_{0j} \geqq 0,\ j = 1, \ldots, n+1\ \forall N > 0,$$

also

$$a'_{-1,j} \geqq 0,\ j = 1, \ldots, n+1.$$

Die Auswahl einer Pivotspalte j_* muss daher nach der Regel

$$a_{-1,j_*} = \min\left\{\, a_{-1,j} \;\middle|\; a_{-1,j} < 0 \,\right\}$$

erfolgen. Diese Auswahlregel gilt solange wie die Hilfsvariable x_{n+1} noch Basisvariable ist. Wenn sie in einem Transformationsschritt zur Nichtbasisvariablen wird (und damit den aktuellen Wert 0 hat), dürfen die Zeile -1 und die zur Nichtbasisvariablen x_{n+1} gehörende Spalte aus dem Rechenschema gestrichen werden; das so reduzierte Rechenschema ist dann primal zulässig für die ursprüngliche Aufgabe und die Rechnung ist nach der normalen Simplexmethode fortsetzbar. Hat im optimalen Rechenschema die Variable x_{n+1} einen positiven Wert $x^*_{n+1} > 0$, so folgt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x^*_j - N x^*_{n+1} \Longrightarrow -\infty \text{ für } N \Longrightarrow \infty,$$

was uns sagt, dass die ursprüngliche Aufgabe keine zulässige Lösung hat.

3.3. Beispiel: Wir wollen das letzte Beispiel mit der primalen Simplexmethode lösen. Wegen $b_2 < 0$ haben wir eine Hilfsvariable t einzuführen. Das erste Rechenschema lautet damit:

	u_0	x	y	z	t
x_0	0	0	0	0	1
	0	-2	3	-1	0
u	5	2	1	-1	0
v	-2	1	-1	-1	$-\mathbf{1}$
w	10	-1	2	3	0
s	8	2	-2	3	0

.

Die 0-te Transformation mit dem Auflösen der v-Gleichung nach der Variablen t liefert ein primal zulässiges Schema:

	u_0	x	y	z	v
x_0	-2	1	-1	-1	1
	0	-2	3	-1	0
u	5	2	1	-1	0
t	2	-1	$\mathbf{1}$	1	-1
w	10	-1	2	3	0
s	8	2	-2	3	0

.

Für die 1. Transformation wählen wir $j_* = 2$ und erhalten $i_* = 2$, da

$$\min\left\{ \frac{a_{i0}}{a_{i2}} \;\middle|\; a_{i2} > 0 \right\} = \min\{\,5; 2; 5\,\} = 2.$$

Nach der Transformation haben wir das Schema

	u_0	x	t	z	v
x_0	0	0	1	0	0
	-6	1	-3	-4	3
u	3	3	-1	-2	1
y	2	-1	1	$\mathbf{1}$	-1
w	6	1	-2	1	2
s	12	0	2	5	-2

.

Wir erkennen, dass die Hilfsvariable t zur Nichtbasisvariablen wurde und daher den Wert 0 angenommen hat. Folglich streichen wir die Hilfszeile und Hilfsspalte, um ein primal zulässiges Rechneschema der ursprünglichen Aufgabe zu erhalten. Für die nächste Transformation wählen wir $j_* = 2$ und erhalten $i_* = 2$. Es gibt sich als neues Schema

	u_0	x	y	v
x_0	2	-3	4	-1
u	7	1	2	-1
z	2	-1	1	-1
w	4	2	-1	3
s	2	$\mathbf{5}$	-5	3

.

Für die letzte Transformation wählen wir $j_* = 1$ und erhalten $i_* = 4$, was ein optimales Schema liefert:

	u_0	s	y	v
x_0	$\frac{16}{5}$	$\frac{3}{5}$	3	$\frac{4}{5}$
u	$\frac{33}{5}$	$-\frac{1}{5}$	3	$-\frac{8}{5}$
z	$\frac{12}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$
w	$\frac{16}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{9}{5}$
x	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	-1	$\frac{3}{5}$

.

♡

Die Endlichkeit der primalen Simplexmethode ist für den Fall klar, dass der Zielfunktionswert in jedem Schritt wächst. Wir haben also nur noch den Ausartungsfall zu betrachten. Dieser Fall tritt ein, falls in einem Schritt eine Pivotzeile mit $a_{i*0} = 0$ ausgewählt wird. In einem solchen Falle (und nur in einem solchen) ändern sich sind bei der Transformation die Werte aller Basisvariablen nicht; es ändert sich zur aktuellen zulässigen Lösung nur der Satz von Basisvariablen. Nur in einem solchen Falle besteht die Möglichkeit, dass sich der Zielfunktionswert danach nicht erhöht und man durch weitere Transformationen des Rechenschemas schließlich zu einem bereits berechneten Satz von Basisvariablen zurückkehrt, womit die Endlichkeit der Simplexmethode gestört ist, da sich diese Situation zyklisch wiederholen wird. In der Praxis sind solche Zyklen bisher unbekannt, wohl aber sind solche Aufgaben konstruierbar. Im Ausartungsfall wird die primale Simplexmethode so modifiziert, dass eine Zyklenbildung ausgeschlossen ist. Formal gesehen geht man zu einer gestörten Aufgabe P_ε ($\varepsilon > 0$) über:

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - \varepsilon^j) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - \varepsilon^j) & \leqq & b_i + \varepsilon^{n+i},\ i = 1, \ldots, m, \\ x_j & \geqq & 0,\ j = 1, \ldots, n \end{array} \right\}$$

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ definiert jede Indexmenge, die eine Basislösung der Aufgabe P definiert, auch eine Basislösung der Aufgabe P_ε und umgekehrt. Außerdem tritt in der gestörten Aufgabe keine Ausartung auf. Diese ε-Störung wird aber nicht explizit ausgeführt, sondern symbolisch gedacht. Auf Einzelheiten soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Im Rahmen von Programmsystemen gibt es verschiedene numerisch bessere Varianten der Simplexmethode als die hier dargelegte. Wir haben hier nur eine Laborvariante der Simplexmethode besprochen. Als verkaufsfähiges Software-Produkt muss diese Methode noch mit numerisch effizienten Methoden der linearen Algebra angereichert werden.

Kapitel 4

Implementation der naiven Simplexmethode

Die im folgenden beschriebene `C++`-Klasse `lo_Simplex` ist eine einfache Implementation der Simplexmethode zum Lösen linearer Optimierungsaufgaben. Dabei darf die zu lösende Aufgabe in Normalform oder in Standardform vorliegen. Unter der Normalform einer linearen Optimierungsaufgabe soll eine Formulierung des Problems in der Form

$$\text{opt}\left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i,\ i = 1,\ldots,m,\ x_j \geqq 0,\ j = 1,\ldots,n \right\}$$

verstanden sein; entsprechend ist

$$\text{opt}\left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1,\ldots,m,\ x_j \geqq 0,\ j = 1,\ldots,n \right\}$$

die Standardform (opt $\in \{\max, \min\}$). In der Implementation wird ein reduziertes Rechenschema verwendet. Die implementierten Simplexmethoden erfordern keine zulässige Basislösung. Falls für die Normalform der Nullpunkt nicht zulässig, also mindestens eine rechte Seite negativ ist, wird in allen Restriktionen mit einer negativen rechten Seite eine Hilfsvariable eingeführt (in allen die gleiche) und die so erweiterte Aufgabe gelöst:

$$\text{opt}\left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - N x_{n+1} \;\middle|\; \begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i x_{n+1} & \leqq & b_i,\ i = 1,\ldots,m, \\ x_j & \geqq & 0,\ j = 1,\ldots,n \end{array} \right\}.$$

Hierin ist $s_i = 1$, falls $b_i < 0$; sonst gilt $s_i = 0$. Die Zahl N stelle man sich als hinreichend groß vor; sie wird explizit nicht benötigt. Hat in der gefundenen optimalen Lösung die Hilfsvariable einen positiven Wert, ist der zulässige Bereich der

ursprünglichen Aufgabe leer. Von diesem Trick merkt der Nutzer jedoch nichts.
Während die Aufgabe in Normalform mit einer primalen Simplexmethode gelöst wird, ist für die Aufgabe in Standardform ein Primal-Dual-Algorithmus implementiert, bei dem die Gleichungsauflösung mit der Optimierung verknüpft ist. Während des Lösungsprozesses werden die den Gleichungen entsprechenden Spalten der Nichtbasisvariablen aus dem Rechenschema gestrichen.
Die Klasse `lo_Simplex` benötigt das System `LS`, das über die Homepage des Autors kostenfrei erhältlich ist. Mit ihm ist der Modellaufbau wesentlich beschleunigt.
Ein Beispielprogramm:

```
//: $CC -o beispiel3 beispiel3.cpp $OPTIONS -lm
#define ls_REAL float
#include "lo_Simplex.h"
int main()
{ ls_UINT m=4, n=3; ls_REAL zfwert;

// Aufbau der Zielfunktion c, der Restriktionsmatrix A
// und der rechten Seite b mit den LS-Klassen.
// Es geht um die Aufgabe:
// max{2x-3y+z | 2x+ y- z <= 5,  x- y- z <= -2,
//               -x+2y+3z <= 10, 2x-2y+3z <= 8, x,y,z >= 0 }

  ls_Matrix A(m,n); ls_Vector c(n), b(m), x(n);
  c[0]=2.,     c[1]=-3., c[2]=1.;
  A[0][0]=2.,  A[0][1]=1.,  A[0][2]=-1.,
  A[1][0]=1.,  A[1][1]=-1., A[1][2]=-1.,
  A[2][0]=-1., A[2][1]=2.,  A[2][2]=3.,
  A[3][0]=2.,  A[3][1]=-2., A[3][2]=3.;
  b[0]= 5., b[1]=-2., b[2]=10., b[3]=8.;
  lo_Simplex B(c,A,b);        // Modelldeklaration
  B.max_with_inequalities(zfwert, x)>>"";
        // Optimierung: Rückkehrwert ist ein m-Vektor,
        // der die Erfüllung der Restriktionen zeigt.
  x>>"";                 // Anzeigen der Lösung
  cout<<"optimal value: "<<zfwert<<endl;
  return 0;
}
```

Die zugehörige `h`-Datei liefert weitere Informationen.

```
#ifndef LO_SIMPLEX
#define LO_SIMPLEX
#include "lo_names.h"
#ifndef LS_MATRIX
#include LS_MATRIX_H // LS-System wird benötigt!
#endif
```

```
/*
Naive Simplexmethode (Ohne numerische Ansprüche!):
Man maximiere/minimiere (c,x) unter
Ungleichungsbedingungen Ax<=b, x>=0
oder unter Gleichungsbedingungen Ax=b,x>=0:
*/

class lo_Simplex
{ protected:
  ls_Matrix A, T;        // Problem-Matrix und Simplex-Tableau
  ls_Vector c, b;        // ZF- und rechte-Seiten-Vektor
  ls_array1<int> basis, nbasis;
                         // Indices der Basis-, Nichtbasisvar.
  char ONAME[ls_len];    // Objektname
  public:
  char *name, *A_name, *T_name, *c_name,
       *b_name, *basis_name, *nbasis_name;
                         // Zeiger auf Objektnamen
  ls_REAL eps;           // Genauigkeitsschranke
  int it;                // Anzahl der ausgeführten Iterationen
  lo_Simplex(char *nam="lo_Simplex");
                         // Standard-Konstruktor mit Objektnamen
  lo_Simplex(ls_Vector &cc, ls_Matrix &AA,
             ls_Vector &bb, char* ="lo_Simplex");
                         // Datenübernahme; danach sind
                         // die Objekte cc, AA, bb ohne Daten
  lo_Simplex(lo_Simplex &);
  const lo_Simplex& operator=(const lo_Simplex &);
  ls_Vector min_with_inequalities(ls_REAL &zfw, ls_Vector &x);
  ls_Vector max_with_inequalities(ls_REAL &zfw, ls_Vector &x);
     // Modell in Ungleichungsform; auf x werden die optimale
     // Lösung, auf zfw der optimale Zielfunktionswert abgeliefert;
     // Rückkehrwert ist ein Vektor mit Erfüllung der Restriktionen
  lo_Simplex& min_with_equations(ls_REAL &, ls_Vector &x);
  lo_Simplex& max_with_equations(ls_REAL &, ls_Vector &x);
                         // Modell in Gleichungsform;
                         // es wird ein primal-dual-Algorithmus
                         // angewendet.
  ls_Vector balance(ls_REAL &zfw, const ls_Vector &x) const
  { ls_Vector r; r=b-A*x; zfw=c*x; return r;}
                         // Zu einem gegebenen Vektor werden die
                         // Erfüllung der Restriktionen und der
                         // Zielfunktionswert ausgegeben.
  const lo_Simplex& write(ostream &) const;
                         // Objektdaten-Ausgabe in eine Datei
  lo_Simplex& read(istream &);
                         // Objektdaten-Eingabe aus einer Datei
  const lo_Simplex& operator>>(char *) const;
                         // Ausgabe in eine namentliche Datei
```

```
  lo_Simplex& operator<<(char *);
                             // Eingabe aus einer namentl. Datei
};
#ifndef LO_LIB
#ifndef LO_SIMPLEXC
#include LO_SIMPLEX_C
#endif
#endif
#endif
```

Man erkennt insbesondere, dass in der Klasse neben Optimierungsmethoden auch Methoden zur Bilanzierung, Ein- und Ausgabe des Modells in eine bzw. aus einer Datei existieren. Der eigentliche Modellaufbau wird durch die Vektor- und die Matrixklasse aus dem LS-System unterstützt.

Kapitel 5

Transportproblem

Ein Spezialfall der allgemeinen linearen Optimierungsaufgabe ist das Transportproblem

$$\min\left\{ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} & = & a_j, & j=1,\ldots,n, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} & = & b_i, & i=1,\ldots,m, \\ x_{ij} & \geqq & 0, & i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n \end{array} \right\}$$

unter der Bedingung des ökonomischen Gleichgewichtes

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i.$$

Wenn wir diese Aufgabe in der Standardform

$$\min\left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{o} \right\}$$

schreiben, erhalten wir im Falle $m=3, n=4$ das folgende System $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{12} \\ \cdots \\ x_{24} \\ x_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Prinzipiell könnte man die Simplexmethode als Lösungsmethode verwenden. Wegen der speziellen Struktur der Koeffizientenmatrix wäre eine formale Anwendung der

Simplexmethode aber ineffizient. Insbesondere sind die Transformationen der Koeffizientenmatrix zeitaufwendig und in diesem Falle auch unnötig, da ihre Werte 0 oder 1 bleiben. Wir werden hier eine Lösungsmethode darstellen, die sich bei genauerer Betrachtung als Spezialisierung der Simplexmethode für das Transportproblem darstellt, aber unabhängig von ihr entstanden ist.
Jede Transportaufgabe hat eine zulässige Lösung, z. B.

$$x_{ij} = \frac{b_i a_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j},$$

was man durch Einsetzen sofort verifiziert.
Die Dualaufgabe lautet hier

$$\max\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j v_j + \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \;\middle|\; u_i + v_j \leqq c_{ij},\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n \right\}.$$

Man überlegt sich leicht, dass der Rang der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ einer Transportaufgabe höchstens gleich $n+m-1$ ist. Durch vollständige Induktion zeigt man, dass ihr Rang mindestens gleich $n+m-1$ ist; also hat sie den Rang $n+m-1$. Daher gibt es eine zulässige Basislösung mit höchstens $n+m-1$ positiven Komponenten. Wir betrachten den Fall, dass bei jeder zulässigen Basislösung genau $n+m-1$ positive Komponenten vorliegen; andernfalls ist der Ausartungsfall eingetreten, zu dem wir später eine Bemerkung machen werden.
Die folgende einfache Methode liefert eine zulässige Basislösung:

1. Man wähle eine beliebige Startvariable $x_{i_* j_*}$ aus.

2. Für $i = i_*, i_*+1, \dots, m, 1, \dots, i_*-1$, für $j = j_*, j_*+1, \dots, n, 1, \dots, j_*-1$ führe aus:

$$x_{ij}^0 = \min(a_j, b_i),\ a_j := a_j - x_{ij}^0,\ b_i := b_i - x_{ij}^0.$$

5.1. Beispiel:

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	12
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	16
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	27
8	30	5	12	

Wir starten mit $i_* = 2,\ j_* = 3$ und erhalten

$$\begin{array}{|cccc|c|} \hline 0 & 12 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 11 & 16 \\ 8 & 18 & 0 & 1 & 27 \\ \hline \hline 8 & 30 & 5 & 12 & \\ \hline \end{array}.$$

Dabei bleiben die letzte Spalte und die letzte Zeile unverändert. ♡

Wir verwenden nun den Satz vom komplementären Schlupf, um eine zulässige Basislösung (x_{ij}^0) auf Optimalität zu testen. Nach dem Satz muss gelten:

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \forall i,j:\ x_{ij}^0 > 0,$$

$$c_{ij} - (u_i + v_j) \geqq 0 \quad \forall i,j:\ x_{ij}^0 = 0.$$

Das erste System hat $n+m-1$ Gleichungen für $n+m$ Unbekannte, so dass man einer Variablen einen beliebigen Wert geben darf; wir setzen stets $u_1 = 0$.
Wir geben eine Transportkostenmatrix vor:

$$\begin{array}{|c||cccc|} \hline & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline u_1 & 4 & (\mathbf{1}) & 3 & 2 \\ u_2 & 1 & 2 & (\mathbf{5}) & (\mathbf{6}) \\ u_3 & (\mathbf{3}) & (\mathbf{8}) & 2 & (\mathbf{4}) \\ \hline \end{array}.$$

Die markierten Daten definieren das duale Gleichungssystem:

$$u_1 + v_2 = 1, \quad u_2 + v_3 = 5, \quad u_2 + v_4 = 6,$$

$$u_3 + v_1 = 3, \quad u_3 + v_2 = 8, \quad u_3 + v_4 = 4.$$

Daraus erhalten wir mit dem Anfang $u_1^0 = 0$:

$$v_2^0 = 1,\ u_3^0 = 7,\ v_4^0 = -3,\ v_1^0 = -4;\ u_2^0 = 9,\ v_3^0 = -4.$$

Das Ergebnis, zusammen mit den Größen $c'_{ij} = c_{ij} - (u_i^0 + v_j^0)$ tragen wir in ein Schema ein:

$$\begin{array}{|c||cccc|} \hline & -4 & 1 & -4 & -3 \\ \hline 0 & 8 & 0 & 7 & 5 \\ 9 & -4 & -8 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Das Rechenschema wird vervollständigt, indem auch noch die Größen a_j, b_i und der Zielfunktionswert aufgenommen werden. An die Stellen mit $c_{ij} - (u_i^0 + v_j^0) = 0$ für $x_{ij}^0 > 0$ schreiben wir in markierter Form die positiven x_{ij}^0:

	−4	1	−4	−3	$\boldsymbol{b}$
0	8	**12**	7	5	12
9	−4	−8	**5**	**11**	16
7	**8**	**18**	−1	**1**	27
$\boldsymbol{a}$	8	30	5	12	295

An dem Rechenschema erkennen wir, dass die aktuelle Duallösung $(\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{v}^0)$ drei Restriktionen der Dualaufgabe nicht erfüllt, nämlich die Ungleichungen $(2,1), (2,2)$ und $(3,3)$. Von diesen wird die zweite am schlechtesten erfüllt; daher entscheiden wir, dass die Nichtbasisvariable x_{22} zur Basisvariablen wird, also einen positiven Wert erhält. Dieser Wert muss nun so gewählt sein, dass wieder eine zulässige Basislösung vorliegt, also höchstens $n+m-1$ positive Komponenten in der Lösung vorkommen. Dazu muss das verfügbare Transportaufkommen umverteilt werden. Die Umverteilung darf offenbar nur so erfolgen, dass in jeder Zeile, in der ein x_{ij}-Wert erniedrigt wird, ein anderer erhöht werden muss; gleiches gilt für die Spalten, da die Zeilen- und Spaltensummen über die positiven x_{ij}-Werte konstant bleiben müssen. Wir haben somit eine zyklische Umverteilung vorzunehmen. Wenn wir den Wert von x_{22} erhöhen, ist z. B. x_{12} ein ungeeigneter Kandidat für eine Erniedrigung in der gleichen Spalte, da in der 1. Zeile keine weitere Variable mit einem positiven Wert vorkommt, die den Zeilenausgleich in der 1. Zeile ermöglichen könnte. Folglich ist nur der Wert von x_{34} erhöhbar; damit ergibt sich zwangsläufig, dass der Wert von x_{24} zu erniedrigen ist. Ein Umverteilungszyklus ist gefunden, denn in jeder Zeile, in der eine Erhöhung geschieht, wird auch erniedrigt; ebenso in jeder Spalte. Den wirklich neuen, positiven Wert der Variablen erhalten wir aus den Forderungen, dass einerseits alle Variablen x_{ij} nur nichtnegative Werte und andererseits höchstens $n+m-1$ Variable einen positven Wert haben dürfen. Daraus schließen wir: Die neue Nichtbasisvariable erhält als Wert das Minimum aller jener Werte von am Zyklus beteiligten Variablen, deren Werte erniedrigt werden müssen. In unserem Falle folgt daraus $x_{22} = 11$. Diesen Wert hat die Variable x_{24}. Damit entspricht der Umverteilung in diesem Falle der Austausch der Basisvariablen x_{24} gegen die Nichtbasisvariable x_{22}. Das neue Rechenschema enthält zunächst die neue Basislösung (x_{ij}^1). Die Lösung des zugeordneten dualen Gleichungssystems

$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad \forall i,j:\ x_{ij}^1 > 0$$

liefert zusammen mit den restlichen Größen

$$c'_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \quad \forall i,j:\ x_{ij}^1 = 0$$

das vollständige Schema:

$$\begin{array}{|c||rrrr||r|}
\hline
 & -4 & 1 & 4 & -3 & \boldsymbol{b} \\
\hline
0 & 8 & \mathbf{12} & -1 & 5 & 12 \\
1 & 4 & \mathbf{11} & \mathbf{5} & 8 & 16 \\
7 & \mathbf{8} & \mathbf{7} & -9 & \mathbf{12} & 27 \\
\hline
\boldsymbol{a} & 8 & 30 & 5 & 12 & 187 \\
\hline
\end{array}.$$

Wir sehen, dass für die atuelle Duallösung zwei Restriktionen verletzt sind: Jene mit c_{13} und mit c_{33}. Wählen wir x_{33} als neue Basisvariable, so lautet der neue Zyklus:

$$x_{33}, x_{32}, x_{22}, x_{23}$$

mit $x_{33} = 5$ und dem sich daraus ergebenden Schema

$$\begin{array}{|c||rrrr||r|}
\hline
 & -4 & 1 & -5 & -3 & \boldsymbol{b} \\
\hline
0 & 8 & \mathbf{12} & 8 & 5 & 12 \\
1 & 4 & \mathbf{16} & 9 & 8 & 16 \\
7 & \mathbf{8} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{12} & 27 \\
\hline
\boldsymbol{a} & 8 & 30 & 5 & 12 & 142 \\
\hline
\end{array}.$$

Dieses Schema liefert uns eine optimale Lösung der Transportaufgabe, da die duale Lösung zulässig ist:

$$x_{12}^* = 12,\ x_{22}^* = 16,\ x_{31}^* = 8,\ x_{32}^* = 2,\ x_{33}^* = 5,\ x_{34}^* = 12,$$

alle anderen Variablen sind gleich 0; der optimale Zielfunktionswert ist gleich 142. Verbal besteht die Methode aus den folgenden Schritten:

1. Man bestimme ein Anfangsschema mit einer zulässigen Basislösung.

2. Man wähle ein Indexpaar (i_*, j_*) mit $c'_{i_* j_*} < 0$; etwa

   $$c'_{i_* j_*} = \min c'_{ij} < 0.$$

   Falls kein solches Indexpaar existiert, liegt ein optimales Schema vor und die Methode endet.

3. Man bestimme eine neue Basislösung mittels Umverteilung, so dass die Nichtbasisvariable x_{i_*, j_*} Basisvariable wird und dafür genau eine Basisvariable zur Nichtbasisvariablen wird (Finden eines Zyklus).

4. Man korrigiere die Duallösung durch Lösen des neuen dualen Gleichungssystems.

5. Man korrigiere die neuen Größen c'_{ij} mit $x_{ij} = 0$.

Der Hauptaufwand dieser Methode liegt offenbar im Finden eines Zyklus. Numerische Probleme treten hier nicht auf, da man im Bereich der ganzen Zahlen rechnet.
Abschließend noch eine Bemerkung zur Ausartung. In der Methode tritt Ausartung auf, falls eine Basisvariable den Wert 0 hat, also weniger als $n+m-1$ positive Komponenten in der aktuellen Basislösung vorliegen. Dieser Fall lässt sich dadurch ausschließen, dass man zu einem gestörten Problem übergeht, in dem man die Zahlen a_j durch $a_j - \varepsilon,\ j = 1, \dots, n$ und die Größe b_m durch $b_m - n\varepsilon$ mit einem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ ersetzt. Sind alle Daten a_i, b_j ganze Zahlen, so ist

$$\varepsilon < \frac{1}{2n}$$

eine richtige Wahl. Natürlich wird die Störung der rechten Seite nicht explizit ausgeführt, sondern bei Auftreten der Ausartung virtuell vollzogen.

Kapitel 6

Übungen

1. Eine Firma stellt 2 Produkte P_1, P_2 her und möchte ein weiteres Produkt P_3 herstellen, das gegenüber P_1 und P_2 den doppelten Gewinn pro Tonne einbringt. P_1 und P_2 bringen jeweils eine Gewinneinheit pro Tonne. Die Produktion von P_1 und P_2 soll mindestens 14 Gewinneinheiten bringen. P_2 und P_3 benötigen pro Tonne jeweils eine Einheit des Rohstoffes 1, wovon 12 Einheiten verfügbar sind. P_1 umd P_3 benötigen pro Tonne jeweils eine Einheit des Rohstoffes 2, von dem 10 Einheiten vorhanden sind.
   Man bestimme die Produktmengen so, dass der Betrieb einen maximalen Gewinn erwirtschaftet.

2. Man stelle für die folgende Aufgabe ein mathematisches Modell auf:
   Ein Schiff mit einer Ladefähigkeit von 7000 t, einer Laderaumkapazität von 10000 m^3 soll 3 Güter G_1, G_2, G_3 in solchen Mengen laden, dass der Frachtertrag möglichst groß wird. Die Tabelle enthält für jedes Gut die verfügbare Menge M in t, den benötigten Laderaum R in m^3/t und den Frachtertrag F in in DM/t.

	G_1	G_2	G_3
M	3500	4000	2000
R	1,2	1,1	1,5
F	25	30	35

3. Ein Konfektionsbetrieb bekommt Stoffballen von 200 cm Breite geliefert. Daraus sollen zur Weiterverwendung mindestens 30 Ballen von 110 cm Breite, 40 Ballen von 75 cm Breite und 15 Ballen von 60 cm Breite hergestellt werden. Der Stoffballenverbrauch soll möglichst gering werden. Hierfür stelle man ein mathematisches Modell auf.

4. Man löse folgendes Optimierungsproblem grafisch:

$$\max\left\{2x_1+3x_2 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1+2x_2 & \leqq & 8, \\ 2x_1+x_2 & \leqq & 10, \\ x_2 & \leqq & 3, \\ x_1,x_2 & \geqq & 0 \end{array}\right\}$$

5. Für welche Werte von $\alpha\,(\alpha\in\mathbb{R})$ hat das lineare Optimierungsproblem keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen?

$$\min\left\{-x_1-x_2 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} -x_1+x_2 & \leqq & 2, \\ x_1-3x_2 & \leqq & 3, \\ -\alpha x_1+x_2 & \leqq & 3, \\ x_1,x_2 & \geqq & 0 \end{array}\right\}$$

6. Man löse folgende Optimierungsprobleme:

(a)

$$\min\left\{-2x_1-x_2 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} -x_1+x_2 & \leqq & 3, \\ x_1-2x_2 & \leqq & 2, \\ x_1,x_2 & \geqq & 0 \end{array}\right\}$$

(b)

$$\max\left\{3x_1-x_2+x_3+x_4 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} 2x_1+x_2-3x_3-x_4+x_5 & = & 4, \\ -x_1+x_2+2x_3-2x_4+x_6 & = & 4, \\ -x_1+2x_3+x_4+x_7 & = & 4, \\ x_1,\ldots,x_7 & \geqq & 0 \end{array}\right\}$$

(c)

$$\min\left\{x_1+x_2-x_3 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1-2x_3 & \leqq & 0, \\ 3x_1-x_2-4x_3 & \leqq & 0, \\ x_1+2x_2 & \geqq & 10, \\ x_2+3x_3 & \geqq & 4, \\ x_1,x_2,x_3 & \geqq & 0 \end{array}\right\}$$

(d)

$$\max\left\{2x_1-x_2+x_3 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1+x_2-x_3-x_4 & = & 4, \\ 2x_1+3x_2-x_3-2x_4 & = & 9, \\ x_2+2x_3 & \geqq & 3, \\ x_1,\ldots,x_4 & \geqq & 0 \end{array}\right\}$$

(e)

$$\min \left\{ 12x_1 + 6x_2 + 10 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} 6x_1 + x_2 & \geqq & 18, \\ x_1 + 4x_2 & \geqq & 12, \\ 2x_1 + x_2 & \geqq & 10, \\ x_1, x_2 & \geqq & 0 \end{array} \right\}$$

7. Man bestimme alle Lösungen der Aufgabe:

$$\max \left\{ 3x_2 - x_3 \mid 0 \leqq x_1 - 2 \leqq x_2 - 3 \leqq x_3 - 4 \leqq 7 \right\}$$

8. Man beweise, dass die Simplexmethode bei der folgenden Aufgabe nicht endet:

$$\max \left\{ x - y + z - s \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x - 2y - 3z + 4s & \leqq & 0, \\ 4x - 3y - 2z + s & \leqq & 0, \\ x + y + z + s & \leqq & 1, \\ x, y, z, s & \geqq & 0 \end{array} \right\}$$

9. Man löse das Transportproblem

		V_1	V_2	V_3
		30	10	20
E_1	20	1	4	2
E_2	40	2	3	1

   (a) mit dem Simplex-Algorithmus,

   (b) mit dem Transport-Algorithmus.

10. Man löse das Transportproblem:

		V_1	V_2	V_3	V_4
		1	6	3	4
E_1	5	4	3	6	8
E_2	3	2	5	2	1
E_3	6	1	3	3	4

.

11. Man löse das folgende Optimierungsproblem mit dem Transport-Algorithmus:

		a_1	a_2	a_3	a_4
		1	1	1	1
b_1	1	8	5	4	4
b_2	1	5	4	2	2
b_3	1	5	2	5	2
b_4	1	4	2	2	3

.

Index